

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

试题详解与评析 水木艾迪考研命题研究中心

一、 选择题 (本题共 10 小题, 每小题 4 分, 满分 40 分, 在每小题给的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是

- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$

【解】 答案 B. $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = x + o(x) + \sqrt{x} + o(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$, 因此 $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$.

考点: 泰勒公式与等价无穷小量的正确运用, 水木艾迪辅导的星级考点. 参见水木艾迪考研数学 36 计例 1-1, 1-2, 1-3 等题目.

(2) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$, 渐近线的条数为

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【解】 答案 D. 垂直渐近线 $x = 0$, 水平渐近线 $y = 0 (x \rightarrow -\infty)$, 斜渐近线 $y = x (x \rightarrow +\infty)$.

考点: 渐近线的实质是极限问题, 应从单侧极限入手考察单侧渐近线的存在性. 参见水木艾迪考研数学 36 计例 5-10, 基础班讲义例 4-24, 强化班第 2 讲例 43.

(3) 如图, 连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图像分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 上的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周, 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则下列结论正确的是

- (A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$ (B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$
(C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$ (D) $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$

【解】 答案 C. 利用积分的几何意义, 并注意代数面积的概念 (水木艾迪辅导的星级考点).

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 下列命题错误的是

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 则 $f(0) = 0$ (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x} = 0$, 则 $f(0) = 0$
(C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在 (D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在

【解】 答案 D.

考点: 点连续概念, 导数定义, 无穷小量比阶的概念与极限运算法则. (D) 的成立不一定保证导致可导的两个极限存在.

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 令 $u_n = f(n) = 1, 2, \dots, n$, 则下

列结论正确的是

- (A) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 (B) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散
(C) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 (D) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

【解】答案 D。画出草图, 结论显见。下面证明 D:

$u_1 < u_2$, 则 $u_2 - u_1 > c > 0$, 其中 c 是某个确定的正数, 于是存在 $\xi_1 \in (1, 2)$ 使得

$$\frac{u_2 - u_1}{2 - 1} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f'(\xi_1) > c > 0,$$

对任意 $x \in (\xi_1, +\infty)$, 由 $f''(x) > 0$, $f'(x)$ 单调增加, 得到 $f'(x) > f'(\xi_1) > c > 0$, 于是

又存在 $\xi_2 \in (\xi_1, x)$ 使得 $f(x) = f(\xi_1) + f'(\xi_2)(x - \xi_1) \rightarrow +\infty (x \rightarrow +\infty)$ 。

考点: 用 Lagrange 定理分析函数性质是水木艾迪考研数学强调的星级考点。参见水木艾迪考研数学 36 计例 5-3, 基础班讲义例 4-42, 例 4-43, 强化班第 2 讲例 28。

(6) 设曲线 $L: f(x, y) = 1$ ($f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数), 过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N , T 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧, 则下列小于零的是

- (A) $\int_T f(x, y) dx$ (B) $\int_T f(x, y) dy$
(C) $\int_T f(x, y) ds$ (D) $\int_T f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy$

【解】答案: (B)

解释: (A) 曲线过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N , T 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧, $\int_T f(x, y) dx = \int_T 1 dx = x(N) - x(M) > 0$, 其中 $x(M), x(N)$ 分别表示 M, N 的 x 坐标。

(B) $\int_T f(x, y) dy = \int_T 1 dy = y(N) - y(M) < 0$: 其中 $y(M), y(N)$ 分别表示 M, N 的 y 坐标。

(C) $\int_T f(x, y) ds = \int_T 1 ds = \text{弧长} > 0$

(D) $\int_T f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy = \int_T 0 dx + 0 dy = 0$

考点: 第一类、第二类曲线积分的概念。参见水木艾迪考研数学 2007 模拟试题一套数一 5 题。水木艾迪考研数学 36 计之 19。

(7) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是

- (A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$
(C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$ (D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$

【解】答案 A。

因为 $(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) = 0$, 所以 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关。

考点: 线性相关与线性无关的概念。参考: 水木艾迪强化班向量例 17。

(8) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B

- (A) 合同, 且相似 (B) 合同, 但不相似
(C) 不合同, 但相似 (D) 既不合同, 也不相似

【解】答案 B。

因为 A 的特征值为 $3, 3, 0$, 所以 A 和 B 不相似。又 A 和 B 的秩都为 2 且正惯性指数都为 2, 所以 A 和 B 合同。

考点: 矩阵的相似与合同概念, 相似矩阵的性质, 合同矩阵的性质, 惯性定理等。

参考: 水木艾迪基础班二次型例 2 例 3。强化班二次型例 2, 冲刺班特征值例 35。36 计之例 23-5。

(9) 某人向统一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

- (A) $3p(1-p)^2$ (B) $6p(1-p)^2$ (C) $3p^2(1-p)^2$ (D) $6p^2(1-p)^2$

【解析与点评】 $P\{\text{第 4 次射击恰好第 2 次命中目标}\}$

$$= P\{\text{第 4 次射击命中, 且前 3 次中恰好命中 1 次}\}$$

$$= p \cdot C_3^1 p(1-p)^2 = 3p^2(1-p)^2$$

故选 C。

本题是 Bernoulli 试验中的典型问题, 可参见水木艾迪 2006 考研数学基础班讲义例 1.33, 强化班第一讲问题 7, 考研 36 技之例 29-25 等题目和内容。

(10) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_X(x), f_Y(y)$ 分别表示 X, Y 的概率密度, 则在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为 (A)。

- (A) $f_X(x)$ (B) $f_Y(y)$ (C) $f_X(x)f_Y(y)$ (D) $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

【解析与点评】由于 (X, Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, 所以 X 与 Y 相互独立,

$$\text{从而 } f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = f_X(x), \text{ 故选 A.}$$

本题主要考查了二维正态分布的不相关性、独立性的等价关系, 属于最基本的内容。

二、填空题: 11-16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上。

(11) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解】 $\int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = -\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} d\frac{1}{x} = e^{\frac{1}{x}} \Big|_2^1 = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}.$

考点: 水木艾迪考研数学强调: 凑微分法是处理积分问题最重要的基础。

(12) 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____。

【解】 答案: $-f'_u \frac{y}{x} + f'_v \frac{x}{y} - f'_u \frac{y}{x} + f'_v \frac{x}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_u \left(-\frac{y}{x^2} \right) + f'_v \left(\frac{1}{y} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_u \left(\frac{1}{x} \right) + f'_v \left(-\frac{x}{y^2} \right)$$

$$\begin{aligned} x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} &= -f'_u \frac{y}{x} + f'_v \frac{x}{y} - f'_u \frac{y}{x} + f'_v \frac{x}{y} \\ &= -2 \left(f'_u \frac{y}{x} - f'_v \frac{x}{y} \right) \end{aligned}$$

考点: 具有抽象函数记号的多元复合函数的偏导数计算, 这是一道很单纯的题目, 参见水木艾迪基础班第 10 讲 19 题。

(13) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解为 $y =$ _____。

【解】 齐次解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$, 设特解为 $y = A e^{2x}$, 由待定系数法得到

$$4A e^{2x} - 8A e^{2x} + 3A e^{2x} = 2e^{2x}, \quad A = 2, \quad \text{答案: } y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}.$$

考点: 常规的二阶常系数非齐次线性微分方程解法(非齐次项为 $P_n(x)e^{\alpha x}$ 型)的求解)。这是水木艾迪考研数学强调的星级考点之一, 有关处理方法及相同例题参见强化班第 8 讲例 6、7、8、9、10 等题目, 水木艾迪考研数学 36 计之 11 计の説明与例题。

(14) 设曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$, 则 $\iint_{\Sigma} (x + |y|) dS =$ _____。

【解】 (方法 1) 由域与被积函数的对称性有:

$$\iint_{\Sigma} x dS = 0, \quad \iint_{\Sigma} |y| dS = \iint_{\Sigma} |x| dS = \iint_{\Sigma} |z| dS$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x + |y|) dS &= \iint_{\Sigma} |y| dS = \frac{1}{3} (\iint_{\Sigma} |y| dS + \iint_{\Sigma} |x| dS + \iint_{\Sigma} |z| dS) \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (|x| + |y| + |z|) dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} dS = \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3} \sqrt{3} \end{aligned}$$

(方法 2) 利用物理意义

$$\oiint_{\Sigma} (x+|y|)dS = \oiint_{\Sigma} |y|dS = 8 \iint_{\Sigma, x, y, z \geq 0} ydS = 8 \cdot \bar{y} \cdot |S| = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot |S| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

(方法 3) 化成二重积分

$$\oiint_{\Sigma} (x+|y|)dS = \oiint_{\Sigma} |y|dS = 8 \iint_{\Sigma, x, y, z \geq 0} ydS = 8 \iint_{\Sigma, x, y, z \geq 0} y\sqrt{3}dxdy = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

考点: 利用曲面积分概念及对称性计算第一型曲面积分的基本运算题, 木艾迪辅导中强调的星级考点。

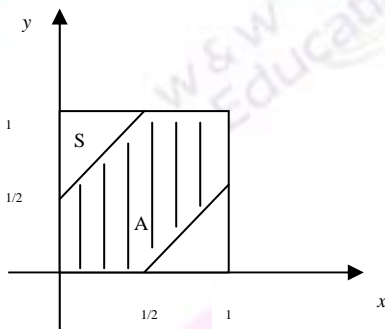
(15) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为_____。

【解】 $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $r(A^3) = 1$ 。

考点: 矩阵的运算和矩阵的秩。

(16) 在区间 $(0, 1)$ 中随机的取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 $\frac{3}{4}$ 。

【解析与点评】 由几何概型计算 (见图), 可知所求概率 $= \frac{|A|}{|S|} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^2}{1} = \frac{3}{4}$



本题是几何概型的典型题目, 许多几何分布的概率题可以化为几何概型来解决, 类似的题目可参见水木艾迪 2006 考研数学基础班讲义例 1.8, 例 1.10, 强化班例 1.10, 考研 36 技之例 29-24 等题目。

三、解答题: 17-24 小题, 共 86 分。请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明过程或演算步骤。

(17) (本题满分 11 分) 求函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域

$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值和最小值。

【解】(1) $f'_x = 2x - 2xy^2$, $f'_y = 4y - 2x^2y$, 求函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在的驻点,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2xy^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 2x^2y = 0 \end{cases}$$

在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 内的驻点为: $(\pm\sqrt{2}, 1)$ 。

(2) 求函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域边界上的条件极值。Lagrange 函数

$$L = x^2 + 2y^2 - x^2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2xy^2 + \lambda(2x) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4y - 2x^2y + \lambda(2y) = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

条件驻点为 $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ 。

(3) 比较函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在这些点的值的大小, 最小值为 0, 最大值为 8。

评论: (1) 考有界闭区域上的最值问题: 区域内的无条件极值问题+区域边界上的条件极值问题, 这是多元微分应用的一道典型考题, 认真负责的考研辅导班都会讲到类似的题。

(2) 不用条件极值也可以求边界上的最大、最小值。第一部分同上, 第二部分可以改为如下:

在边界 $L_1: y = 0 \quad (-2 \leq x \leq 2)$ 上, $f(x, y) = x^2$, 最大值为 4, 最小值为 0;

在边界 $L_2: x^2 + y^2 = 4 \quad (y \geq 0)$ 上, $y = \sqrt{4 - x^2}$,

$$f(x, y) = f(x, \sqrt{4 - x^2}) = x^4 - 5x^2 + 8,$$

驻点: $x_1 = 0, x_2 = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ 。在边界上最大值为 8, 最小值为 0。这样也可以得到结果。

本题考点: 多元函数在有界闭域上最大最小值问题的分析与计算方法。相同例题参见水木艾迪 2007 模拟试题二套数一 5 题。

(18) (本题满分 10 分) 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xzdydz + 2zydzdx + 3xydxdy$, 其中 Σ 为曲面

$z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的上侧。

【解】(方法 1) 利用 Gauss 公式。

加上辅助平面 S_1^+ : $\begin{cases} z=0 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \end{cases}$, 下侧为正, 组成内则为正的封闭曲面, 由 Gauss 公式,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} xzdydz + 2zydzdx + 3xydxdy + \iint_{S_1^+} xzdydz + 2zydzdx + 3xydxdy &= \iiint_{\Omega} 3z dxdydz \\ &= \int_0^1 3z dz \iint_{x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1-z} dxdy = \int_0^1 6\pi z(1-z) dz = \pi. \end{aligned}$$

$$\text{而 } \iint_{S_1^+} xzdydz + 2zydzdx + 3xydxdy = - \iint_{x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1} 3xydxdy = 0$$

$$\text{故 } I = \iint_{\Sigma} xzdydz + 2zydzdx + 3xydxdy = \pi.$$

(方法 2) 直接计算, 记曲面 Σ 在三个坐标面上的投影分别为 D_{xy} , D_{yz} , D_{zx}

$$\iint_{\Sigma} 3xydxdy = \iint_{D_{xy}} 3xydxdy = 0,$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} xzdydz &= 2 \iint_{D_{yz}} z \sqrt{1-z-\frac{y^2}{4}} dydz = 2 \int_0^1 z dz \int_{-2\sqrt{1-z}}^{2\sqrt{1-z}} \sqrt{1-z-\frac{y^2}{4}} dy \\ &= \int_0^1 z [2(1-z)\pi] dz = \frac{\pi}{3}, \end{aligned}$$

$$\iint_{\Sigma} 2zydzdx = 4 \iint_{D_{zx}} z \sqrt{4(1-z-x^2)} dzdx = 8 \int_0^1 z dz \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} \sqrt{1-z-x^2} dx = \frac{2}{3}\pi.$$

$$\text{所以: } I = \iint_{\Sigma} xzdydz + 2zydzdx + 3xydxdy = \pi.$$

(方法 3) 利用法向量, 将第二类曲面积分变成第一类曲面积分也可以计算。

$$\Sigma: z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4} \quad (0 \leq z \leq 1), \quad \vec{n} = 2x\vec{i} + \frac{y}{2}\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{16x^2 + y^2 + 4}}(4x\vec{i} + y\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$I = \oiint_{\Sigma} (xz\vec{i} + 2zy\vec{j} + 3xy\vec{k}) \cdot \vec{n}_0 dS = \oiint_{\Sigma} \frac{4x^2z + 2zy^2 + 6xy}{\sqrt{16x^2 + y^2 + 4}} dS$$

$$\text{其中 } dS = \frac{\sqrt{16x^2 + y^2 + 4}}{2} dx dy, \quad \oiint_{\Sigma} \frac{6xy}{\sqrt{16x^2 + y^2 + 4}} dS = 0$$

因此只需计算 $I = \frac{1}{2} \oiint_{\Sigma} 4x^2 z + 2zy^2 dS$ 即可。

本题考点: 第二型曲面积分概念与计算。相同例题参见水木艾迪 2007 模拟试题二套数一 20 题, 水木艾迪强化班第 12 讲曲面积分例 10 及例 12。

点评: 第二类曲线积分有三种求值方法: 直接算法, Gauss 公式法, 将第二类曲面积分变成第一类曲面积分, 本题用这三种方法都能解。

(19) (本题满分 11) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$ 。

【证】移项造辅助函数 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h(a) = 0, h(b) = 0$ 。合理的思路是: 证明存在 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $h(x_0) = 0$, 再用 Rolle 定理两次得到结论。

(方法一) 若 $f(x), g(x)$ 的最大值在 (a, b) 内同一点取得, 则存在 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $h(x_0) = 0$ 。 $f(x), g(x)$ 二阶可导, 于是由 Rolle 定理, $\exists x_1 \in (a, x_0)$ 与 $x_2 \in (x_0, b)$ 使得 $h'(x_1) = 0$ 与 $h'(x_2) = 0$, 进而 $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$, 使得 $h''(\xi) = 0, f''(\xi) = g''(\xi)$ 。

若 $f(x), g(x)$ 的最大值不在同一点取得, 则存在 $x_1 \in (a, b)$ 与 $x_2 \in (a, b), x_1 \neq x_2$ 使得

$$f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x) = g(x_2) = \max_{x \in [a, b]} g(x)$$

$$h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) > 0 \text{ 且 } h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) < 0$$

由连续函数的零点定理, 存在介于 x_1, x_2 之间的 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $h(x_0) = 0$, 又 $h(a) = 0, h(b) = 0, f(x), g(x)$ 二阶可导, 于是由 Rolle 定理, $\exists \xi_1 \in (a, x_0), \exists \xi_2 \in (x_0, b)$ 使得 $h'(\xi_1) = 0, h'(\xi_2) = 0$, 于是 $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, 使得 $h''(\xi) = 0$, 即 $f''(\xi) = g''(\xi)$ 。

综上, $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$ 。

(方法二) 用反证法也能证明存在 $\eta \in (a, b)$ 使 $h(\eta) = 0$ 。

假设不存在 $\eta \in (a, b)$ 使 $h(\eta) = 0$, 则 $h(x) > 0, \forall x \in (a, b)$; 或
水木艾迪考试培训网: www.tsinghua.edu.cn 8 清华大学东门外创业大厦 1006

$h(x) < 0, \forall x \in (a, b)$ 。不妨假设 $h(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ 。

设 $g(x)$ 在 $x_1 \in (a, b)$ 取到最大值, 则应有 $f(x_1) > g(x_1)$, 与已知条件函数 $f(x), g(x)$

在 (a, b) 内有相等的最大值矛盾。因此假设不成立, 即存在 $\eta \in (a, b)$ 使 $h(\eta) = 0$ 。其余步骤同 (方法一)。

本题考点: 连续函数性质, 导函数性质及 Rolle 定理运用。移项造辅助函数是水木艾迪考研数学 36 计之一计, 相同例题参见水木艾迪 2007 模拟试题二套数一 19 题, 考研数学 36 计例 5-7, 例 5-8。最后的证法比较简单, 值得推广。

(20) (本题满分 10 分) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内收敛, 其和函数 $y(x)$ 满足

$$y'' - 2xy' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

(I) 证明 $a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n = 1, 2, \dots$;

(II) 求 $y(x)$ 的表达式。

【证】 (1) (方法一)

由 $y(0) = 0$ 得 $a_0 = 0$, $y'(0) = 1$ 得 $a_1 = 1$, $y''(0) = 0 = 2!a_2$, $a_2 = 0$,

$$y'''(x) = 2xy''(x) + 2y'(x) + 4y'(x) = 2xy^{(3-1)}(x) + [4 + 2(3-2)]y^{(3-2)}(x)$$

$$y'''(0) = 2y'(0) + 4y'(0) = 6a_1 = 3!a_3, \text{ 因此 } a_3 = 1, \text{ 即 } k=1 \text{ 时成立 } a_{k+2} = \frac{2}{k+1}a_k.$$

$$y^{(4)}(0) = 2y'(0) + [4 + 2(4-2)]y''(0) = 0 = 4!a_4, a_4 = 0$$

$$y^{(n)}(x) = 2xy^{(n-1)}(x) + [4 + 2(n-2)]y^{(n-2)}(x)$$

假设 $k \leq 2n+1$ 时成立:

$$y^{(k)}(x) = 2xy^{(k-1)}(x) + [4 + 2(k-2)]y^{(k-2)}(x)$$

$$y^{(k)}(0) = [4 + 2(k-2)]y^{(k-2)}(0)$$

$$y^{(2n)}(0) = 0, y^{(2n+1)}(0) = [4 + 2(2n-1)]y^{(2n-1)}(0) = (2n+1)!a_{2n+1}$$

即 $a_{2n+1} = \frac{2}{2n+1-1}a_{2n-1}$, 且 $a_{2n} = 0$ 。考察 $k = 2n+3$ 的情况,

$$y^{(2n+2)}(x) = 2xy^{(2n+1)}(x) + [4 + 2(2n-2)]y^{(2n)}(x), y^{(2n+2)}(0) = 0$$

$$y^{(2n+3)}(x) = 2xy^{(2n+2)}(x) + [4 + 2(2n-1)]y^{(2n+1)}(x), y^{(2n+3)}(0) = [4 + 2(2n+1)]y^{(2n+1)}(0)$$

$$= [4 + 2(2n+1)](2n+1)!a_{2n+1} = (2n+3)!a_{2n+3}$$

$$a_{2n+3} = \frac{[4+2(2n+1)](2n+1)!}{(2n+3)!} a_{2n+1} = \frac{2}{2n+3-1} a_{2n+1}$$

由归纳法得到 $a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n=1,2,\dots$ 。

$$(\text{方法二}) \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\text{代入微分方程得到} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = 0$$

$$0 \text{ 次幂系数为零: } 2a_2 - 4a_0 = 0$$

$$n \text{ 次幂系数为零: } (n+1)(n+2) a_{n+2} - 2(n+2) a_n = 0, n=1,2,\dots$$

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, \quad n=1,2,\dots$$

$$(2) \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1, \quad a_5 = \frac{1}{2} a_3, \quad a_7 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} a_3, \quad a_9 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} a_3,$$

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{2}{2n} a_{2n-1} = \dots = \frac{1}{n!}, \quad n=1,2,\dots, \text{ 于是方程的幂级数解为}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} = x e^{x^2}$$

本题考点: 微分方程解的性质, 幂级数逐项微分与求和方法。相同例题参见水木艾迪 2007 模拟试题二套数三 17 题。

$$(21) \quad (\text{本题满分 11 分}) \text{ 设线性方程组 } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2 x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{与方程} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad (2)$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解。

【解】考虑方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2 x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a+1 & a-1 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & 0 \end{pmatrix}$$

若 $a \neq 2$ 且 $a \neq 1$ 时, 方程组无解, 即方程组 (1) 和 (2) 无公共解。

当 $a = 1$ 时,

$$\rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

齐次线性方程组的基础解系为: $(-1, 0, 1)^T$,

①和②的所有公共解为: $k(-1, 0, 1)^T$, k 为任意常数。

当 $a = 2$ 时,

$$\rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

非齐次线性方程组有唯一解: $(0, 1, -1)^T$, ①和②的所有公共解为: $(0, 1, -1)^T$ 。

考点: 线性方程组有解的判断条件, 齐次线性方程组的解的理论性质, 非齐次线性方程组解的理论性质, 用初等变换求方程组的解等。

参考: 水木艾迪基础班线性方程组例 9, 强化班线性方程组第 5 类问题。

(22) (本题满分 11 分) 设 3 阶对称矩阵 A 的特征向量值

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, \alpha_1 = (1, -1, 1)^T$$

是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量, 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$ 其中 E 为 3 阶单位矩阵。

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 B 。

【解】(I) $B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_1 = \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$,

所以 α_1 是 B 的属于特征值 -2 的特征向量。

设 α_2 是 λ_2 的特征向量, 则

$$B\alpha_2 = (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_2 = 2^5\alpha_2 - 4 \times 2^3\alpha_2 + \alpha_2 = \alpha_2$$

设 α_3 是 λ_3 的特征向量, 则

$$B\alpha_3 = (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_3 = (-2^5)\alpha_3 - 4 \times (-2)^3\alpha_3 + \alpha_3 = \alpha_3$$

所以 B 的全部特征值为 $-2, 1, 1$ 。

设 B 的属于 1 的特征向量为 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则 $\alpha_1^T \alpha = 0$, 即

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0,$$

解得 $(1, 1, 0)^T$ 和 $(0, 1, 1)^T$, 所以 B 的属于特征值 1 的特征向量为

$$\alpha = k_1(1, 1, 0)^T + k_2(0, 1, 1)^T,$$

其中 k_1, k_2 为不全为零的常数。属于特征值 -2 的特征向量为 $\alpha_1 = k(1, -1, 1)^T$, 其中 k 是不为零的常数。

$$(II) \text{ 令 } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

$$B = P \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

考点: 矩阵的特征值与特征向量, 实对称矩阵的特征向量的性质, 矩阵的相似对角化, 求逆矩阵, 矩阵的运算等。

参考: 水木艾迪基础班特征值例 14, 强化班特征值第 6 类问题。

(23) (本题满分 11 分) 设二维随机变量 (x, y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(I) 求 $P\{X > 2Y\}$;

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度。

$$\text{【解】(I) } P\{X > 2Y\} = \iint_{x>2y} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{x}{2}} (2 - x - y) dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[x - \frac{5}{8} x^2 \right] dx = \frac{7}{24}$$

(II) 【解 1】

$$F_Z(z) = P(X + Y \leq z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \int_0^z \left[\int_0^{z-x} (2 - x - y) dy \right] dx = z^2 - \frac{1}{3} z^3, & 0 \leq z < 1, \\ 1 - P(X + Y > z) = 1 - \int_{z-1}^1 \left[\int_{z-x}^1 (2 - x - y) dy \right] dx = 1 - \frac{1}{3} (2 - z)^2, & 1 \leq z < 2, \\ 1, & z \geq 2. \end{cases}$$

从而

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 2z - z^2, & 0 \leq z < 1, \\ (2 - z)^2, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

【解 2】 由于 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, z-u) du$, 其中被积函数为

$$f(u, z-u) = \begin{cases} 2-z, & 0 < u < 1, 0 < z-u < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

于是

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z (2-z) du = 2z - z^2, & 0 \leq z < 1, \\ \int_{z-1}^1 (2-z) du = (2-z)^2, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

【解析与点评】 本题是二维连续型随机变量的典型题目, 主要考查了二维随机变量的概率的计算和它的函数的分布等基本问题, 问题 (I) 只要利用公式

$$P\{(X, Y) \in A\} = \iint_A f(x, y) dx dy,$$

而对问题 (II), 只要大家熟悉二维随机变量的函数的分布的直接求法 (即解法一), 就容易求得结果, 当然, 此问题也可以用解法二的公式法获得。这种类型的题目在水木艾迪各级别的辅导中均为最基本的题型, 可参见水木艾迪 2006 考研数学基础班讲义例 3.3、3.10、3.15、3.16、3.21, 强化班的例 3.3、3.12、3.22, 考研 36 技之例 32-2 至 32-7 等等题目。

(24) (本题满分 11 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta} & 0 < x < \theta \\ \frac{1}{2(1-\theta)} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 x 的简单随机样本, \bar{X} 是样本均值

(I) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(II) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 并说明理由。

【解】 (I) 由于 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, \theta) dx = \int_0^\theta x \frac{1}{2\theta} dx + \int_\theta^1 x \frac{1}{2(1-\theta)} dx = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4},$

令 $EX = \bar{X}$, 故得参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} = 2\bar{X} - \frac{1}{2}$ 。

(II) $4\bar{X}^2$ 不是为 θ^2 的无偏估计量。因为

$$E(4\bar{X}^2) = 4[DX + (EX)^2] = 4\left[\frac{1}{n}DX + (EX)^2\right]$$

注意到

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, \theta) dx = \int_0^{\theta} x^2 \frac{1}{2\theta} dx + \int_{\theta}^1 x^2 \frac{1}{2(1-\theta)} dx = \frac{\theta^2}{3} + \frac{\theta}{6} + \frac{1}{6},$$

$$\text{故 } DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{\theta^2}{12} - \frac{\theta}{12} + \frac{5}{48}$$

所以

$$E(4\bar{X}^2) = 4\left[\frac{1}{n}DX + (EX)^2\right] = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)\theta^2 + \left(1 - \frac{1}{3n}\right)\theta + \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{12n}\right) \neq \theta^2$$

【解析与点评】本题也可以用如下的推断获得结果:

$$E(4\bar{X}^2) = 4\left[\frac{1}{n}DX + (EX)^2\right] = \frac{4}{n}DX + \frac{1}{4} + \theta + \theta^2 > \theta^2 \quad (\text{因为 } DX \geq 0, \text{ 且 } \theta > 0)$$

本题考查了矩估计的求法和无偏性的判断, 是数理统计的基本题型。这种类型的题目在水木艾迪各级别的辅导中也均为最基本的题型, 可参见水木艾迪 2006 考研数学基础班讲义例 6.11、6.16、6.20、6.22, 强化班的例 6.3、6.11, 考研 36 技之例 35-7 至 35-11 等等题目。